Analiza matematyczna dla informatyków 2

Definicje obowiązujące na egzaminie

Kamil Wylegała

26 stycznia 2010

Definicja 1: Liczba g jest granicą ciągu liczbowego (x_n), o ile

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n > n_0,\ n \in \mathbb{N} \quad |x_n - g| < \varepsilon$$

Definicja 2: Niech x będzie punktem skupienia zbioru X. Mówimy, że y jest granicą funkcji $f : X \to Y$ w punkcie x wtedy, gdy

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in X,\ z \neq x \quad d(z, x) < \delta \Rightarrow d(f(z), y) < \varepsilon$$

Przykład: Podaj definicję granicy funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie 7.

$\lim_{x\to 7} f(x) = y$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad |x - 7| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

Definicja 3: Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła w punkcie $x \in X$, gdzie X, Y to przestrzenie metryczne, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in X \quad d(z, x) < \delta \Rightarrow d(f(z), f(x)) < \varepsilon$$

Definicja 4: Dany jest ciąg liczb (a_n) wówczas sumą szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nazywamy granicę ciągu sum częściowych (s_n), że

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Definicja 5: Pochodną w punkcie t funkcji $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}$ nazywamy granicę ilorazu różnicowego:

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Definicja 6: Niech $E \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym a $f : E \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem, $x \in E$. Jeśli istnieje takie odwzorowanie liniowe $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0,$$

to mówimy, że przekształcenie f jest różniczkowalne w punkcie x. Odwzorowanie A nazywamy pochodną odwzorowania f w punkcie x i oznaczamy:

$$f'(x) = A \qquad \text{lub} \qquad Df(x) = A.$$

Jeżeli f jest różniczkowalna w dowolnym punkcie $x \in E$, to mówimy, że f jest różniczkowalna na E.

Przykład: Podaj definicję pochodnej funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ w punkcie $(0,1)$.

Pochodną funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ w punkcie $(0,1)$ nazywamy takie odwzorowanie liniowe A, że:

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{|f((0,1)+h) - f(0,1) - Ah|}{\|h\|} = 0$$

Definicja 7: Niech $[a,b]$ będzie danym przedziałem. Podziałem $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ nazywamy skończony zbiór punktów $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ takich, że

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$\Delta x_j = x_j - x_{j-1} \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Niech f będzie ograniczoną funkcją rzeczywistą, określoną na $[a,b]$. Każdemu podziałowi $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ odpowiadają liczby

$$M_j = \sup_{x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j} f(x)\ , \qquad m_j = \inf_{x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j} f(x)\ ,$$

$$U(f;\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j\ , \qquad L(f;\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j\ .$$

Liczby $U(f;\mathcal{P})$, $L(f;\mathcal{P})$ nazywamy odpowiednio sumą górną i dolną Riemanna. Dalej

$$\overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \inf_{\mathcal{P}} U(f;\mathcal{P})\ ,$$

$$\underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \sup_{\mathcal{P}} L(f;\mathcal{P})\ ,$$

to odpowiednio całka górna i całka dolna funkcji f.

Funkcję ograniczoną $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ nazywamy całkowalną w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]$ o ile jej całka dolna jest równa całce górnej i wtedy tą wspólną wartość nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$ i oznaczamy:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x} = \overline{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Definicja 8a: Niech $D \subseteq \mathbb{R}$ będzie przedziałem i niech $f : D \to \mathbb{R}$. Funkcję $F : D \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji f, jeżeli jest różniczkowalna i $F'(x) = f(x)$. Całką nieoznaczoną funkcji f nazywamy zbiór jej funkcji pierwotnych i oznaczamy:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definicja 8b: Całką nieoznaczoną funkcji $f(x)$, oznaczaną symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

nazywamy wyrażenie $F(x)+C$, gdzie $F'(x) = f(x)$ (F jest funkcją pierwotną funkcji f), a C to dowolna stała.